Mit Hilfe einer Reduktion des Halteproblems kann man zeigen:

Jede nichttriviale, semantische Eigenschaft von Programmen (DTMs) ist unentscheidbar:

- Semantisch: Die Eigenschaft hängt nicht von der syntaktischen Form des Programms (der DTM), sondern nur von der erkannten Sprache ab.
- Nichttrivial: Es gibt Turing-erkennbare Sprachen, die sie erfüllen, aber nicht alle Turing-erkennbare Sprachen erfüllen sie.

Beispiele für solche Eigenschaften:

- die DTM hält für jede Eingabe.
- die DTM hält bei der leeren Eingabe (Halteproblem)
- die DTM erkennt eine reguläre Sprache
- usw.

Wir setzen semantische Eigenschaften von DTMs mit Eigenschaften der von ihnen erkannten Sprachen gleich:

Eine Eigenschaft Turing-erkennbarer Sprachen ist eine Menge

$$E \subseteq \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ Turing-erkennbar}\}$$

Satz 16.13 (Satz von Rice)

Es sei E eine Eigenschaft Turing-erkennbarer Sprachen mit

$$\emptyset \subset E \subset \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ Turing-erkennbar}\}$$

Dann ist

$$L(E) := \{\text{code}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \text{ DTM mit } L(\mathcal{A}) \text{ erfüllt } E\}$$

unentscheidbar.

Beweis:

Sei E wie in Satz 16.13.

Wir zeigen Unentscheidbarkeit durch Reduktion des Halteproblems.

Für jede DTM $\mathcal{A}$ kann man DTM $\widehat{\mathcal{A}}$ konstruieren so dass

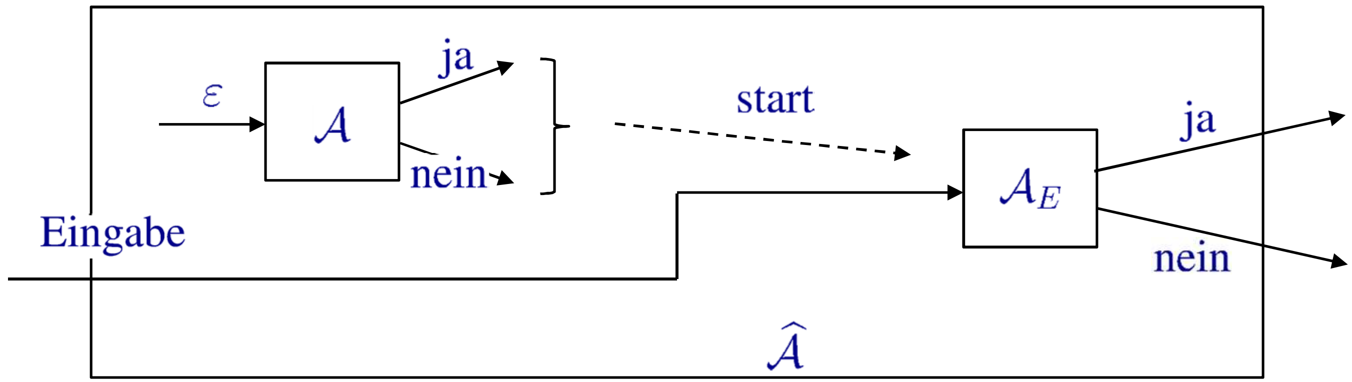
$\mathcal{A}$ hält auf der leeren Eingabe gdw. $L(\widehat{\mathcal{A}})$ erfüllt E.

Zur Konstruktion von $\widehat{\mathcal{A}}$ verwende

- Sprache $L_E \in E$ und DTM $\mathcal{A}_E$ mit $L(\mathcal{A}_E) = L_E$.
- O.B.d.A.: die leere Sprache erfüllt E nicht

Ziel:

$\mathcal{A}$ hält auf der leeren Eingabe gdw. $L(\widehat{\mathcal{A}})$ erfüllt E.



$\widehat{\mathcal{A}}$ verhält sich wie gewünscht:

- hält $\mathcal{A}$ auf ε, so erkennt $\widehat{\mathcal{A}}$ die Sprache L_E, also $L(\widehat{\mathcal{A}}) \in E$
- hält $\mathcal{A}$ auf ε nicht, so erkennt $\widehat{\mathcal{A}}$ die leere Sprache, also $L(\widehat{\mathcal{A}}) \notin E$

Es folgt die Unentscheidbarkeit von E.

Nachtrag:

Wir hatten angenommen, dass die leere Sprache E nicht erfüllt

Wenn das nicht der Fall ist:

- dann erfüllt die leere Sprache nicht die Komplementäreigenschaft

$$\overline{E} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ Turing-erkennbar}\} \setminus E$$

- wir können wie beschrieben zeigen, dass $L(\overline{E})$ unentscheidbar ist

- Mit Teil 3 von Satz 15.3 zeigt man nun leicht, dass dann auch $L(E)$ unentscheidbar ist, denn

$$L(\overline{E}) = \overline{L(E)} \cap CODE$$