Prof. Carsten Lutz/Dr. Stefan Göller/Dr. Thomas Schneider SS 2011

Theoretische Informatik 2

Gewertete Aufgaben, Blatt 6

Abgabe bis 4. 7. 11 ins Postfach Ihres Tutors/Ihrer Tutorin Besprechung: KW 27

1. (15 %) Gegeben ist die DTM $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a\}, \{a, \not b\}, q_0, \Delta, \{q_2\})$ mit

$$\Delta : \begin{array}{ccccc} q_0 & a & a & r & q_1 \\ q_1 & a & a & r & q_0 \\ q_0 & \not b & a & n & q_0 \\ q_1 & \not b & \not b & n & q_2 \end{array}$$

sowie die Eingabe $w = a$. Geben Sie das MPKP $f(\mathcal{A}, w)$ an, wobei f die aus der Vorlesung bekannte Reduktion des Halteproblems auf das MPKP ist. Geben Sie außerdem eine Lösung von $f(\mathcal{A}, w)$ an.

2. (35 % = 10 % + 10 % + 15 %) Zeigen Sie, dass für beliebige $L, L' \subseteq \Sigma^*$ gilt:

a) Wenn $L \in \mathrm{P}$ und $L' \in \mathrm{P}$, dann $L \cup L' \in \mathrm{P}$.

b) Wenn $L \in \mathrm{P}$ und $L' \in \mathrm{P}$, dann $L \cdot L' \in \mathrm{P}$.

c) Wenn $L \in \mathrm{P}$, dann $L^* \in \mathrm{P}$.

(Hinweis: verwenden Sie dynamisches Programmieren, um in polynomieller Zeit nacheinander für alle Teilwörter der Eingabe zu testen, ob sie in L^* sind.)

3. (20 % = 2 × 10 %) Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Dabei sind $L, L', L'' \subseteq \Sigma^*$ beliebig.

a) Wenn $L \leq_p L'$ and $L' \leq_p L''$, then $L \leq_p L''$.

b) Wenn $L \leq_p L'$ und $L' \in \mathrm{PSPACE}$, dann $L \in \mathrm{PSPACE}$.

4. (30 % = 3 × 10 %) Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme in NP sind. Argumentieren Sie analog zum Beweis aus der Vorlesung, dass SAT in NP ist. In (a), (b) wird angenommen, dass natürliche Zahlen binär kodiert sind. Sie dürfen verwenden, dass Addition, Multiplikation und Teilbarkeitstest natürlicher Zahlen in polynomieller Zeit ausgeführt werden können.

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$

b) $B = \{a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{N} \mid \exists J \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\} : \sum_{a_i \in J} a_i = b\}$[1]

c) $C = \{\text{Graph } G = (V, E) \mid G \text{ ist 3-färbbar}\}$

Ein Graph heißt 3-färbbar, wenn es eine Abbildung $f : V \to \{r, g, b\}$ gibt, so dass für jede Kante $(u, v) \in E$ gilt: $f(u) \neq f(v)$.

---

[1]Dieses Problem wird das *Rucksackproblem* genannt: Ihr Rucksack fasse b Liter. Sie haben n Gegenstände mit einem Volumen von $a_1, \ldots, a_n$ Litern. Gibt es eine Möglichkeit, Ihren Rucksack so mit einigen dieser Gegenständen zu füllen, dass er genau voll wird?