Struktur Vorlesung

- Kapitel 1: Einleitung
- Kapitel 2: Grundlagen
- Kapitel 3: Ausdrucksstärke und Modellkonstruktionen
- Kapitel 4: Tableau Algorithmen
- Kapitel 5: Komplexität
- Kapitel 6: ABoxen und Anfragebeantwortung
- Kapitel 7: Effiziente Beschreibungslogiken

Kapitel 7

Effiziente Beschreibungslogiken

Ziel des Kapitels

Für manche Anwendungen ist $\mathcal{ALC}$ zu komplex:

- Auch hoch-optimierte Reasoner können große Ontologien wie SNOMED CT nicht verarbeiten (oder nur nach intensivem Tuning)
- In der Anfragebeantwortung muss man oft mit sehr grossen Datenmengen umgehen und braucht schnelle Antworten (scalability)

Wir betrachten die Beschreibungslogik $\mathcal{EL}$:

- viel weniger ausdrucksstark als $\mathcal{ALC}$, Basisoperatoren $\sqcap$ und $\exists r.C$
- Erfüllbarkeit und Subsumption in Polyzeit entscheidbar
- Skalierbare Anfragebeantwortung mit Standard-SQL-Datenbanken möglich

EL

Definition 7.1

Ein $\mathcal{EL}$-*Konzept* ist ein $\mathcal{ALC}$-Konzept, in dem nur die Konstruktoren $\top$, $\sqcap$ und $\exists r.A$ verwendet werden.

Beliebt für biomedizinische Ontologien (groß, hoher Abstraktionsgrad):

$$\begin{aligned}
\text{Perikardium} &\sqsubseteq \text{Gewebe} \sqcap \exists\text{teilVon}.\text{Herz} \\
\text{Perikarditis} &\equiv \text{Entzündung} \sqcap \exists\text{ort}.\text{Perikardium} \\
\text{Entzündung} &\sqsubseteq \text{Krankheit} \sqcap \exists\text{wirktAuf}.\text{Gewebe}
\end{aligned}$$

SNOMED CT ist in unwesentlicher Erweiterung von EL formuliert

$\mathcal{EL}$ ist Grundlage des OWL EL Profiles von OWL2

Simulation

Intuitiv: $\mathcal{EL}$ ist die “Hälfte von $\mathcal{ALC}$”, entspricht der “Hälfte von Bisimulation”

Definition 7.2 (Simulation)

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen

Relation $\rho \subseteq \Delta^{\mathcal{I}_1} \times \Delta^{\mathcal{I}_2}$ ist *Simulation* von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ wenn

1. $d_1 \; \rho \; d_2$ und $d_1 \in A^{\mathcal{I}_1}$ impliziert $d_2 \in A^{\mathcal{I}_2}$, für alle $A \in \mathsf{N_C}$
2. $d_1 \; \rho \; d_2$ und $(d_1, d_1') \in r^{\mathcal{I}_1}$ impliziert die Existenz eines $d_2' \in \Delta^{\mathcal{I}_2}$ mit $d_1' \; \rho \; d_2'$ und $(d_2, d_2') \in r^{\mathcal{I}_1}$, für alle $r \in \mathsf{N_R}$

T7.1

Beachte: im Ggs. zu Bisimulationen sind Simulationen gerichtet!

Simulation

Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Interpretationen, $\boldsymbol{d}_1 \in \boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{I}_1}$, $\boldsymbol{d}_2 \in \boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{I}_2}$.

$(\mathcal{I}_1, \boldsymbol{d}_1) \precsim (\mathcal{I}_2, \boldsymbol{d}_2)$: es gibt Simulation $\boldsymbol{\rho}$ von $\mathcal{I}_1$ nach $\mathcal{I}_2$ mit
$\boldsymbol{d}_1 \; \boldsymbol{\rho} \; \boldsymbol{d}_2$ (wir sagen: $\boldsymbol{d}_2$ *simuliert* $\boldsymbol{d}_!$).

Theorem 7.3.
Seien $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ Interpretationen, $\boldsymbol{d}_1 \in \boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{I}_1}$ und $\boldsymbol{d}_2 \in \boldsymbol{\Delta}^{\mathcal{I}_2}$.
Wenn $(\mathcal{I}_1, \boldsymbol{d}_1) \precsim (\mathcal{I}_2, \boldsymbol{d}_2)$, dann gilt für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte $\boldsymbol{C}$:
$\boldsymbol{d}_1 \in \boldsymbol{C}^{\mathcal{I}_1}$ impliziert $\boldsymbol{d}_2 \in \boldsymbol{C}^{\mathcal{I}_2}$.

Simulation

Intuitiv: Wenn $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \precsim (\mathcal{I}_1, d_1)$, dann kann $\mathcal{EL}$ nicht zwischen d_1 und d_2 "unterscheiden".

Natürlich sind Bisimulation und wechselseitige Simulation nicht dasselbe:

Lemma 7.4.

Es gibt $(\mathcal{I}_1, d_1)$ und $(\mathcal{I}, d_2)$ so dass

- $(\mathcal{I}_1, d_1) \precsim (\mathcal{I}_2, d_2)$ und $(\mathcal{I}_2, d_2) \precsim (\mathcal{I}_1, d_1)$
- $(\mathcal{I}_1, d_1) \not\sim (\mathcal{I}_2, d_2)$

T7.2

Man kann nun wieder Nicht-Ausdrückbarkeitsresultate zeigen:

Lemma 7.5.

Das $\mathcal{ALC}$-Konzept $\forall r.A$ ist nicht in $\mathcal{EL}$ ausdrückbar.

T7.2 cont

EL

In $\mathcal{EL}$ ist Erfüllbarkeit kein interessantes Schlussfolgerungsproblem:

Lemma 7.6
Jedes $\mathcal{EL}$-Konzept ist erfüllbar bzgl. jeder TBox. T7.3

Darum konzentrieren wir uns auf Subsumtion

Wir gehen in 2 Schritten vor:

- ohne TBox: kanonische Modelle für Konzepte
- mit TBox: kanonische Modelle für TBoxen

Subsumtion ohne TBox

Subsumtion ohne TBox

Subsumtion $C \sqsubseteq D$ zwischen $\mathcal{EL}$-Konzepten C, D gilt im Prinzip genau dann, wenn man D syntaktisch "'in C wiederfindet'"

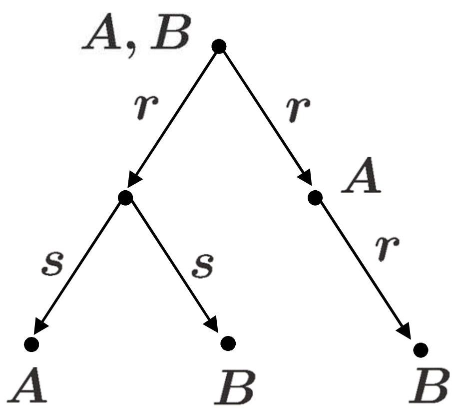
Z.B.:

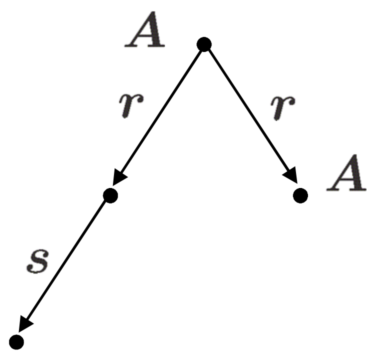
$$C = A \sqcap B \sqcap \exists r.(\exists s.A \sqcap \exists s.B) \sqcap \exists r.(A \sqcap \exists r.B)$$

$$D = A \sqcap \exists r.\exists s.\top \sqcap \exists r.A$$

Konzepte dargestellt als Bäume:

"'Wiederfinden"' entspricht Simulation von D-Baum in C-Baum (Richtung!)





Subsumtion ohne TBox

Ohne formale Definition:

Wir fassen diese Bäume als Interpretation auf; Baum für Konzept C nennen wir das *kanonische Modell* $\mathcal{I}_C$ für das Konzept C.

Damit ist auch klar, was eine Simulation zwischen solchen Bäumen ist.

Die Wurzel von $\mathcal{I}_C$ bezeichnen wir mit d_W.

Die zentrale Eigenschaft kanonischer Modelle:

Lemma 7.7.
Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte C, Interpretation $\mathcal{I}$ und $e \in \Delta^{\mathcal{I}}$ gilt:
$e \in C^{\mathcal{I}}$ gdw. $(\mathcal{I}_C, d_W) \precsim (\mathcal{I}, e)$. T7.4

Subsumtion ohne TBox

Da trivialerweise $(\mathcal{I}_C, d_W) \precsim (\mathcal{I}_C, d_W)$, folgt daraus:

Lemma 7.8.
$d_W \in C^{\mathcal{I}_C}$, also ist $\mathcal{I}_C$ tatsächlich Modell von C.

Zentrale Beobachtung für unseren Subsumptions-Algorithmus:

Lemma 7.9.
Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte C, D gilt: $C \sqsubseteq D$ gdw. $(\mathcal{I}_D, d_W) \preceq (\mathcal{I}_C, d_W)$.

T7.5

Theorem 7.10.
Subsumtion in $\mathcal{EL}$ kann in polynomieller Zeit entschieden werden:

- konstruiere $\mathcal{I}_C$ und $\mathcal{I}_D$ in polynomieller Zeit;
- überprüfe in polynomieller Zeit, ob $(\mathcal{I}_D, d_W) \preceq (\mathcal{I}_C, d_W)$

T7.6

Subsumtion mit TBox

Subsumtion mit TBox

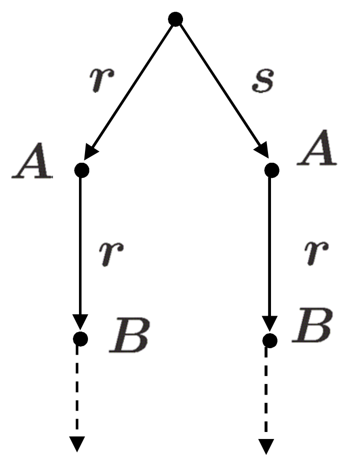
Der beschriebene Algorithmus kann im Prinzip auf TBoxen erweitert werden

Problem: kanonische Modelle werden unendlich groß

Z.B.: $C = \exists r.A \sqcap \exists s.A$

TBox

$$\{A \sqsubseteq \exists r.A\}$$



Man verwendet daher eine kompakte (polynomiell große), aber nicht mehr baumförmige Version des unendlichen kanonischen Modells

Subsumtion mit TBox

Zwei vereinfachende Annahmen:

- Algorithmus entscheidet Subsumtion zwischen Konzept*namen aus* $\mathcal{T}$:

  O.B.d.A. denn $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ gdw. $\mathcal{T}' \models A_C \sqsubseteq A_D$

  mit $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{A_C \equiv C, D \equiv A_D\}$

- $\mathcal{T}$ enthält nur Inklusionen der Form

  $$A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n \sqsubseteq A \qquad A \sqsubseteq \exists r.A_1 \qquad \exists r.A \sqsubseteq A_1$$

  wobei $A, A_1, \ldots, A_n$ Konzept*namen* oder $\top$

T7.7

Dann:

Kanonisches Modell $\mathcal{I}_\mathcal{T}$ für die TBox $\mathcal{T}$, verwendet für *alle* Subsumtionen $\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$, mit A und B Konzeptnamen

Subsumtion mit TBox

Sei $\mathcal{T}$ eine $\mathcal{EL}$-TBox in der beschriebenen Normalform

Folgender Algorithmus konstruiert Folge $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$ von Interpretationen, $\mathcal{I}_k$ ist dann das gesuchte kanonische Modell $\mathcal{I}_\mathcal{T}$.

$\mathcal{I}_0$ ist definiert wie folgt:

- $\Delta^{\mathcal{I}_0} = \{d_A \mid A$ Konzeptname in $\mathcal{T}\} \cup \{d_\top\}$;
- $A^{\mathcal{I}_0} = \{d_A\}$ für alle Konzeptnamen A;
- $r^{\mathcal{I}_0} = \emptyset$ für alle Rollennamen r.

Subsumtion mit TBox

$\mathcal{I}_{i+1}$ erhält man aus $\mathcal{I}_i$ durch (einmaliges) Anwenden einer der folgenden Regeln:

R1 Wenn $d \in (A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n)^{\mathcal{I}_i}$, $A_1 \sqcap \cdots \sqcap A_n \sqsubseteq A \in \mathcal{T}$ und $d \notin A^{\mathcal{I}_i}$

dann $\mathcal{I}_{i+1}$ wie $\mathcal{I}_i$, aber $A^{\mathcal{I}_{i+1}} = A^{\mathcal{I}_i} \cup \{d\}$

R2 Wenn $d \in A^{\mathcal{I}_i}$, $A \sqsubseteq \exists r.B \in \mathcal{T}$ und $(d, d_B) \notin r^{\mathcal{I}_i}$

dann $\mathcal{I}_{i+1}$ wie $\mathcal{I}_i$, aber $r^{\mathcal{I}_{i+1}} = r^{\mathcal{I}_i} \cup \{(d, d_B)\}$

R2 Wenn $(d, d') \in r^{\mathcal{I}_i}$, $d' \in A^{\mathcal{I}_i}$ und $\exists r.A \sqsubseteq B \in \mathcal{T}$

dann $\mathcal{I}_{i+1}$ wie $\mathcal{I}_i$, aber $B^{\mathcal{I}_{i+1}} = B^{\mathcal{I}_i} \cup \{d\}$

T7.8

Subsumtion mit TBox

Man sieht leicht:

- Die Vorbedingungen können in Polyzeit geprüft werden
- Es sind max. $|\Delta^{\mathcal{I}_0}| \cdot |\mathsf{sub}(\mathcal{T})| \leq |\mathcal{T}|^2$ Regelanwendungen möglich.

Lemma 7.11.
$\mathcal{I}_\mathcal{T}$ ist Modell von $\mathcal{T}$. T7.9

Die zentrale Eigenschaft kanonischer Modelle, analog zu Lemma 7.7:

Lemma 7.12.
Für alle Modelle $\mathcal{I}$ von $\mathcal{T}$, $d \in \Delta^\mathcal{I}$ und Konzeptnamen A gilt:
$d \in A^\mathcal{I}$ gdw. $(\mathcal{I}_\mathcal{T}, d_A) \precsim (\mathcal{I}, d)$. T7.10

Subsumtion mit TBox

Zum Entscheiden von Subsumption könnte man nun Simulationen zwischen kanonischen Modellen berechnen.

Da wir uns auf Konzeptnamen beschränken, geht es aber auch viel einfacher: Subsumptionen können direkt aus $\mathcal{I}_\mathcal{T}$ "'abgelesen werden"'

Lemma 7.13.
Für alle $\mathcal{EL}$-Konzepte D und Konzeptnamen A, B in $\mathcal{T}$ gilt:
$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ gdw. $d_A \in B^{\mathcal{I}_\mathcal{T}}$. T7.11

Da die Konstruktion von $\mathcal{I}_\mathcal{T}$ nur polynomielle Zeit erfordert:

Theorem 7.14.
Subsumtion in $\mathcal{EL}$ bzgl. TBoxen kann in polynomieller Zeit entschieden werden.

Vergleich mit Tableau-Algorithmus

Regeln:

- R1 entspricht der Konjunktionsregel, R2 der $\exists$-Regel
- R3 hat keine Entsprechung, Tableau-Algorithmus behandelt $\exists r.A \sqsubseteq B$ über TBox-Normalform als $\forall r.\neg A \sqcup B$, also $\sqcup$-Regel und $\forall$-Regel.

Zentrale Unterschiede:

- Tableau Algorithmus kennt $\Delta^{\mathcal{I}}$ anfangs nicht, führt Elemente nach Bedarf ein
- Tableau Algorithmus konstruiert Baummodell
- Tableau Algorithmus behandelt Konzeptinklusionen $C \sqsubseteq D$ nicht als Regeln 'wenn C, dann D'

Erweiterungen von EL

Erweiterungen von EL

Der Algorithmus kann angepasst werden für $\mathcal{EL}$ erweitert mit:

- $\bot$
- Range Restrictions $\top \sqsubseteq \forall r.C$ und Domain Restrictions $\top \sqsubseteq \forall r^-.C$
- allgemeine Rolleninklusionen $r_1 \circ \cdots \circ r_n \sqsubseteq r$
- $\cdots$

Dies (und mehr) ist im OWL EL Profil von OWL2 realisiert.

Viele andere Erweiterungen lassen die Komplexität zurück auf ExpTime springen

Wir betrachten exemplarisch $\mathcal{ELU}$, die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $\sqcup$

$\mathcal{EL}_\forall$, die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $\forall r.C$

$\mathcal{EL}^{\geq 2}$, die Erweiterung von $\mathcal{EL}$ mit $(\geq 2\, r\, \top)$

Erweiterungen von EL

Theorem 7.15.

Erfüllbarkeit in $\mathcal{ELU}_\bot$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptname A bzgl. $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$

Schritt 1: Ersetze Werterestriktionen in $\mathcal{T}$ durch Existenzrestriktionen:

$\forall r.C$ wird $\neg\exists r.\neg C$

Schritt 2: Modifiziere $\mathcal{T}$ so dass Negation nur vor Konzeptnamen auftritt:

$A \sqsubseteq \exists s.(B' \sqcup \neg\exists r.B)$ wird $A \sqsubseteq \exists s.(B' \sqcup \neg X)$

$X \equiv \exists r.B$

(X neuer Konzeptname)

Erweiterungen von EL

Theorem 7.15.

Erfüllbarkeit in $\mathcal{ELU}_\bot$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptname A bzgl. $\mathcal{ALC}$-TBox $\mathcal{T}$

Schritt 3: Entferne Negation vollständig aus $\mathcal{T}$:

- Ersetze jedes $\neg X$ durch $\overline{X}$, $\overline{X}$ neuer Konzeptname
- Erzwinge korrektes Verhalten von $\overline{X}$:

$$\top \sqsubseteq X \sqcup \overline{X}$$

$$X \sqcap \overline{X} \sqsubseteq \bot$$

$\mathcal{T}'$ sei die resultierende $\mathcal{ELU}_\bot$-TBox.

T7.12

Lemma 7.16

Für alle Konzeptnamen A gilt: A erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. A erfüllbar bzgl. $\mathcal{T}'$.

Erweiterungen von EL

Theorem 7.17.

Subsumtion in $\mathcal{ELU}$ bzgl. TBoxen ist ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Erfüllbarkeit von Konzeptname A bzgl. $\mathcal{ELU}_\bot$-TBox $\mathcal{T}$

Konstruiere $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}'$:

- nimm o.B.d.A. an, dass $\bot$ nur in der Form $C \sqsubseteq \bot$ vorkommt
- ersetze $\bot$ durch neuen Konzeptnamen L
- füge hinzu:

$$\exists r.L \sqsubseteq L \text{ für alle Rollennamen } r \text{ in } \mathcal{T}$$

Lemma 7.18

A unerfüllbar bzgl. $\mathcal{T}$ gdw. $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq L$.

T7.13

Erweiterungen von EL

$\mathcal{EL}^\forall$ ist $\mathcal{EL}$ erweitert um $\forall r.C$

Theorem 7.19. In $\mathcal{EL}^\forall$ ist Subsumtion bzgl. TBoxen ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Subsumtion zwischen Konzeptnamen bzgl. $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}$

Wir können annehmen, das Disjunktion nur in den folgenden Formen vorkommt:

$$\underbrace{A_1 \sqcup A_2 \sqsubseteq A}_{= A_1 \sqsubseteq A,\ A_2 \sqsubseteq A} \qquad \text{und} \qquad A \sqsubseteq B_1 \sqcup B_2$$

ersetze in $\mathcal{T}'$ durch

$$A \sqcap \exists r.\top \sqsubseteq B_1$$
$$A \sqcap \forall r.X \sqsubseteq B_2$$

r, X neu

Lemma 7.20

$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ gdw. $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$.

T7.14

Erweiterungen von EL

$\mathcal{EL}^{\geq 2}$ ist $\mathcal{EL}$ erweitert um $(\geq 2\, r\, \top)$

Theorem 7.21. In $\mathcal{EL}^{\geq 2}$ ist Subsumtion bzgl. TBoxen ExpTime-vollständig.

Beweis: Reduktion von Subsumtion zwischen Knozeptnamen bzgl. $\mathcal{ELU}$-TBox $\mathcal{T}$

Wir können annehmen, das Disjunktion nur in den folgenden Formen vorkommt:

$$\underbrace{A_1 \sqcup A_2 \sqsubseteq A}_{= A_1 \sqsubseteq A,\ A_2 \sqsubseteq A} \qquad \text{und} \qquad A \sqsubseteq B_1 \sqcup B_2$$

ersetze in $\mathcal{T}'$ durch

$$A \sqsubseteq \exists r.X \sqcap \exists r.Y$$

$$A \sqcap \exists r.(X \sqcap Y) \sqsubseteq B_1$$

$$A \sqcap (\geq 2\, r) \sqsubseteq B_2$$

r, X, Y neu

Lemma 7.22

$\mathcal{T} \models A \sqsubseteq B$ gdw. $\mathcal{T}' \models A \sqsubseteq B$.

Erweiterungen von EL

Erweiterung von $\mathcal{EL}$ ist konvex wenn für alle TBoxen $\mathcal{T}$ und Konzepte C, D_1, D_2:

$$\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{T} \models C \sqsubseteq D_1 \sqcup D_2 \text{ für ein } i \in \{1, 2\}$$

$\mathcal{EL} + \forall r.C$ ist nicht konvex:

$$\top \models \exists r.\top \sqcup \forall r.X, \text{ aber } \top \not\models \exists r.\top \text{ und } \top \not\models \forall r.X$$

Unsere Beweise zeigen: jede nicht-konvexe Erweiterung von $\mathcal{EL}$ ist ExpTime-hart

Aber auch konvexe Erweiterungen sind leider nicht zwangsläufig in PTime:

Zum Beispiel ist $\mathcal{ELI}$ ($\mathcal{EL}$ erweitert mit $\exists r^{-}.C$) konvex,
aber ExpTime-vollständig.

Diskussion

Die $\mathcal{EL}$-Familie von BLen:

- Erlaubt Schlußfolgern in polynomieller Zeit
- Es gibt verscheidene Reasoner wie CEL, SNOROCKET und CB
- Skaliert auch auf große Terminologien wie SNOMED CT (> 400.000 Konzepte, wird in < 2 Min. klassifiziert)
- Die Beantwortung konjunktiver Anfragen ist NP-vollständig,...
- ...kann aber skalierbar mit normalen relationalen Datenbanksystemen implementiert werden