AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

MZH 3090
clu@informatik.uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

3. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Komplexitätstheorie“

Aufgabe 11: 5 Punkte

Übersetze folgende 3-Formel φ in einen Graph G und eine Zahl k wie in der Reduktion von 3SAT auf das Cliquenproblem aus der Vorlesung:

$$(a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee c \vee \neg a) \wedge (b \vee \neg c \vee \neg a)$$

Benutze G und k um zu entscheiden, ob φ erfüllbar.

Aufgabe 12: 18 Punkte

Beweise oder wiederlege:

(a) Wenn $L' \in \mathsf{P}$ und $L \leq_p L'$, dann $L \in \mathsf{P}$;

(b) Wenn $L' \in \mathrm{NP}$ und $L \leq_p L'$, dann $L \in \mathrm{NP}$;

(c) $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \leq_p L_3$ impliziert $L_1 \leq_p L_3$;

(d) Wenn L NP-hart ist und $L \leq_P L'$, dann ist L' NP-hart;

(e) Wenn $\mathsf{P} = \mathrm{NP}$, dann ist jedes $L \in \mathrm{NP}$ auch NP-vollständig;

(f) Wenn $L_1 \leq_p L_2$, dann $\overline{L}_1 \leq_p \overline{L}_2$, wobei für $L \subseteq \Sigma^*$ gilt: $\overline{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$;

(g) Wenn $L_1 \subseteq L_2$ und L_1 NP-hart, dann auch L_2 NP-hart.

Aufgabe 13: 10 Punkte

Beweise, dass IPROG NP-hart ist (beachte die Hinweise aus der Vorlesung).

Aufgabe 14: 10 Punkte

Eine 3-Formel φ heisst *Spezialformel*, wenn jede Variable höchstens zwei mal in φ vorkommt (wobei sowohl positive als auch negative Vorkommen gezählt werden). Sei S3SAT die Menge aller erfüllbaren Spezialformeln. Beweise, dass S3SAT in P ist.

Hinweis: Manipuliere die Formel zunächst so, dass jede Variable höchstens einmal vorkommt. Zeige dann, dass die Erfüllbarkeit eine solchen Formel leicht in Polynomialzeit entscheidbar ist.

Aufgabe 15: 10 Punkte (Zusatzaufgabe)

Sei φ eine AL-Formel. Eine $\neq$-*Wertzuweisung* für die Variablen in φ ist eine Wertzuweisung so dass jede Klausel in φ mindestens zwei Literale mit ungleichen Wahrheitswerten enthält. Mit anderen Worten: eine $\neq$-Wertzuweisung erfüllt φ ohne in irgendeiner Klausel alle drei Literale wahr zu machen. Sei $\neq$3SAT die Menge aller 3-Formeln, für die es eine $\neq$-WZ gibt. Beweise, dass $\neq$3SAT NP-vollständig ist.

Hinweis: verwende eine Reduktion von 3SAT, die jede 3SAT-Klausel in zwei $\neq$3SAT-Klauseln umwandelt. Um die Korrektheit der Reduktion zu beweisen, hilft es wahrscheinlich, folgendes zu zeigen: wenn man die Wahrheitswerte einer $\neq$-WZ fr eine AL-Formel φ vertauscht (wahr durch falsch, falsch durch wahr), erhält man wieder eine $\neq$-WZ für φ.