AG Theorie der künstlichen Intelligenz
FB Mathematik und Informatik, Universität Bremen
Prof. Dr. Carsten Lutz

MZH 3090
clu@informatik.uni-bremen.de
Tel.: 0421/218-64431

2. Aufgabenblatt für die Vorlesung „Komplexitätstheorie“

Aufgabe 6: 5 Punkte

Entwickle eine formale Definition des Konfigurationsübergangs “$\vdash_M$” von Turingmaschinen.

Aufgabe 7: 10 Punkte

Entwickle eine (deterministische) Turingmaschine, die als Eingabe $\$\mathsf{bin}(n)$ erhält, wobei $\mathsf{bin}(n)$ die binäre Kodierung der Zahl n ist, und die diese dann inkrementiert. Es wird angenommen, dass das höchstwertige Bit ganz links steht und das niederwertigste ganze rechts. Beim Start steht der Kopf der Maschine auf dem Symbol \$. Dieses darf beim Inkrementieren wenn nötig überschrieben werden.

Gib die Übergänge in graphischer Form an (wie in der Vorlesung). Erkläre die Konstruktion. Gib die Berechnung der TM auf der Eingabe \$111 an.

Aufgabe 8: 10 Punkte

Eine *zweiseitige (deterministische) Turingmaschine (2DTM)* ist eine DTM, deren Band in beide Richtungen unendlich ist. Eine 2DTM beginnt mit dem Kopf auf dem ersten Symbol der Eingabe. Das Symbol $\triangleright$ wird nicht verwendet und das Band ist sowohl links als auch rechts der Eingabe mit $\perp$ beschriftet. Akzeptanz ist wie bei normalen DTMs definiert.

Zeige, dass jede Sprache, die von einer t-zeitbeschränkten 2DTM M akzeptiert wird auch von einer $\mathcal{O}(t)$-zeitbeschränkten DTM M' akzeptiert wird, für alle $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $t(n) \geq n$. Beschreibe die generelle Idee und gib die Konstruktionsvorschrift für M' an, also die exakte Definition der Zustände, Alphabete und Übergänge in Abhängigkeit von der ursprünglichen 2DTM M.

Hinweis: Mehrere Spuren auf einem Band könnten auch hierbei helfen.

Aufgabe 9: 10 Punkte

Für eine Sprache L ist $L^* := \{w_1 \cdot \cdots \cdot w_k \mid k \geq 0,\ w_1, \ldots, w_k \in L\}$. Beweise:

(a) Wenn $L \in \mathsf{P}$, dann $L^* \in \mathsf{P}$;

(b) Wenn $L \in \mathsf{NP}$, dann $L^* \in \mathsf{NP}$.

Hinweis: für (a) braucht man dynamische Programmierung.

Aufgabe 10: 10 Punkte (Zusatzaufgabe)

Für $A \subseteq \mathbb{N}$ verwenden wir die Unärdarstellung $\mathsf{UN}(A) := \{1^n \mid n \in A\}$ und die Binärdarstellung $\mathsf{BIN}(A) := \{\mathsf{bin}(n) \mid n \in A\}$. Zeige, dass für alle $A \subseteq \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{UN}(A) \in \mathsf{P} \text{ gdw. } \mathsf{BIN}(A) \in \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)}).$$

Erkläre, warum Deine Lösung nicht verwendet werden kann, um zu zeigen, dass $\mathsf{UN}(A) \in \mathsf{P}$ gdw. $\mathsf{BIN}(A) \in \mathsf{ExpTime}$.

Hinweis: Man soll Unär- und Binärdarstellung ja wechselseitig umwandeln können.