Berechnung von Bisimulationen

Verfahrensidee: Gegeben sind zwei LTS P und Q. Der Zustandsraum S ist die Vereinigung der Zustandsräume von P und Q. Zerlege S iterativ in disjunkte Teilmengen, bis eine Partitionierung entsteht, die nicht weiter zerlegt werden kann. Diese Äquivalenzklassen stellen dann Zustände dar, die bisimilar sind: Liegen die Anfangszustände beider Prozesse in einer Äquivalenzklasse, so sind P und Q bisimilar.

In Pseudocode:
Partition := $\{S\}$;
Splitter := Label $\times$ Partition;
while (Splitter $\neq \emptyset$)
    choose $(a, C_{spl}) \in$ Splitter;
    forall $C \in$ Partition
        split$(C, a, C_{spl}$, Partition, Splitter);
    Splitter := Splitter - (a, C_{spl});

Die Prozedur *split* arbeitet wie folgt: Es wird ermittelt, von welchen Zuständen in C mit dem Label a ein Zustand in C_{spl} erreicht wird. Ist dies eine echte Teilmenge von C, so muss C aufgeteilt werden, entsprechend verändern sich Partition und Splitter.

procedure *split*$(C, a, C_{spl}$, Partition, Splitter)
    $C^+ := \{P \mid P \in C \wedge \exists Q.(P \xrightarrow{a} Q \wedge Q \in C_{spl})\}$;
    if $(C^+ \neq C \wedge C^+ \neq \emptyset)$
      $C^- := C - C^+$;
      Partition : = Partition $\cup \{C^+, C^-\} - \{C\}$;
      Splitter := Splitter $\cup$ (Label$\times \{C^+, C^-\}) -$ Label $\times \{C\}$;

Beispiel

Als Beispiel werden die Programme

$$P = (a \rightarrow\ b \rightarrow\ \text{STOP}) \,\square\, (a \rightarrow\ c \rightarrow\ \text{STOP})$$

und

$$Q = a \rightarrow ((b \rightarrow\ \text{STOP}) \,\square\, (c \rightarrow\ \text{STOP}))$$

betrachtet.

Die zugehörigen Transitionssysteme in textueller Form:
Die Zustände von $LTS(P)$ sind
$S_0 \equiv (a \rightarrow\ b \rightarrow\ \text{STOP}) \,\square\, (a \rightarrow\ c \rightarrow\ \text{STOP})$
$S_1 \equiv (b \rightarrow\ \text{STOP})$
$S_2 \equiv (c \rightarrow\ \text{STOP})$
$S_3 \equiv \text{STOP}$
$S_4 \equiv \text{STOP}$

mit Transitionen $T_1 = \{(S_0, a, S_1), (S_0, a, S_2), (S_1, b, S_3), (S_2, c, S_4)\}$.
Die Zustände von $LTS(Q)$ sind

$R_0 \equiv a \rightarrow ((b \rightarrow \text{ STOP}) \,\Box\, (c \rightarrow \text{ STOP}))$
$R_1 \equiv (b \rightarrow \text{ STOP}) \,\Box\, (c \rightarrow \text{ STOP})$
$R_2 \equiv \text{STOP}$
$R_3 \equiv \text{STOP}$

mit Transitionen $T_2 = \{(R_0, a, R_1), (R_1, b, R_2), (R_1, c, R_3)\}$.

Somit werden *Partition* und *Splitter* initialisiert:

Partition	= {	$\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, R_0, R_1, R_2, R_3\}\}$
Splitter	= {	$(a, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, R_0, R_1, R_2, R_3\}),$
		$(b, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, R_0, R_1, R_2, R_3)\},$
		$(c, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, R_0, R_1, R_2, R_3\})$ }

Im ersten Durchlauf wird der Splitter $(a, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, R_0, R_1, R_2, R_3\})$ ausgewählt, also

$$split(\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, R_0, R_1, R_2, R_3\}, a, \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, R_0, R_1, R_2, R_3\}, Partition, Splitter)$$

aufgerufen.

Aus der Menge $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, R_0, R_1, R_2, R_3\}$ gibt es nur von S_0 und R_0 aus Transitionen, die mit a beschriftet sind, somit ergeben sich $C^+ = \{S_0, R_0\}$ und $C^- = \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}$.

Folglich ändert sich die Splittermenge gründlich.

Partition	= {	$\{S_0, R_0\}, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}\}$
Splitter	= {	$(a, \{S_0, R_0\}), (b, \{S_0, R_0\}), (c, \{S_0, R_0\}),$
		$(a, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}), (b, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3)\},$
		$(c, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\})$ }

Als nächstes wird der Splitter $(a, \{S_0, R_0\})$ ausgewählt, entsprechend also $split(\{S_0, R_0\}, a, \{S_0, R_0\}, Partition, Splitter)$ aufgerufen - ohne Folgen, da $C^+ = \emptyset$. Anschliessend wird $split(\{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}, a, \{S_0, R_0\}, Partition, Splitter)$ ausgewertet – mit dem gleichen Resultat. Der Splitter $(a, \{S_0, R_0\})$ kann also aus der Splittermenge entfernt werden.

Partition	= {	$\{S_0, R_0\}, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}\}$
Splitter	= {	$(b, \{S_0, R_0\}), (c, \{S_0, R_0\}),$
		$(a, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}), (b, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3)\},$
		$(c, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\})$ }

Genau der gleiche Ablauf ist bei Auswahl von $(b, \{S_0, R_0\})$ und $(c, \{S_0, R_0\})$ zu beobachten. Es gibt keine Transition, die zu einem Zustand in $\{S_0, R_0\}$ führt, also kann eine Menge nicht durch Transitionen in $\{S_0, R_0\}$ aufgespalten werden.

Partition	= {	$\{S_0, R_0\}, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}\}$
Splitter	= {	$(a, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}), (b, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3)\},$
		$(c, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\})$ }

Wählen wir jetzt also $(a, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\})$ als Splitter und rufen

$$split(\{S_0, R_0\}, a, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}, Partition, Splitter)$$

auf. Hier stellen wir fest, dass sowohl von S_0 als auch von R_0 aus eine Transition in die SSplitter–Menge"geht. Also $C^+ = \{S_0, R_0\}$ und erneut keine Verfeinerung der Partition. Der Aufruf von

$$split(\{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}, a, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}, Partition, Splitter)$$

liefert $C^+ = \emptyset$, also erneut keine Änderung. Der Splitter $(a, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\})$ kann also entfernt werden.

Partition	= {	$\{S_0, R_0\}, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}\}$
Splitter	= {	$(b, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3)\},$
		$(c, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\})$ }

Auf ein Neues! Der nächste Splitter ist $(b, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3)$, der entsprechende Aufruf

$$split(\{S_0, R_0\}, b, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}, Partition, Splitter),$$

und wieder passiert nichts ($C^+ = \emptyset$).
Weiter geht es mit

$$split(\{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}, b, \{S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3\}, Partition, Splitter)$$

und diesmal finden wir Transitionen: $C^+ = \{S_1, R_1\}$ und $C^- = \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\}$. Entsprechend wird die Partition geändert und die Splittermenge neu gestaltet.

Partition	= {	$\{S_0, R_0\}, \{S_1, R_1\}, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\}\}$
Splitter	= {	$(a, \{S_1, R_1\}), (b, \{S_1, R_1\}), (c, \{S_1, R_1\}),$
		$(a, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\}), (b, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3)\},$
		$(c, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\})$ }

Nun wird (natürlich rein zufällig) als Splitter $(a, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\})$ gewählt und

$$split(\{S_0, R_0\}, a, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\}, Partition, Splitter),$$

aufgerufen. Von S_0 gibt es eine a-Transition nach S_2, von R_0 geht keine Transition in die Menge $\{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\}$. Also ist $C^+ = \{S_0\}$ und $C^- = \{R_0\}$. Partition und Splittermenge werden entsprechend modifiziert.

Partition	= {	$\{S_0\}, \{R_0\}, \{S_1, R_1\}, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\}\}$
Splitter	= {	$(a, \{S_0\})(b, \{S_0\})(c, \{S_0\})(a, \{R_0\})(b, \{R_0\}), (c\{R_0\}),$
		$(a, \{S_1, R_1\}), (b, \{S_1, R_1\}), (c, \{S_1, R_1\}),$
		$(a, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\}), (b, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3)\},$
		$(c, \{S_2, S_3, S_4, R_2, R_3\})$ }

An dieser Stelle wird das Beispiel abgebrochen - der entscheidende Schritt (die Trennung von S_0 und R_0 in verschiedene Äquivalenzklassen) ist erfolgt. Die Splittermenge muss allerdings noch vollständig abgearbeitet werden, dabei wird auch die Partition noch verändert. Der Endzustand bietet folgendes Bild:

Partition	$= \{\{S_0\}, \{R_0\}, \{S_1\}, \{R_1\}, \{S_2\}, \{S_3, S_4, R_2, R_3\}\}$
Splitter	$= \emptyset$

Da S_0 und R_0 in verschiedenen Äquivalenzklassen liegen, sind die Programme P und Q nicht bisimilar.