Eigenschaften des Zweierkomplements

Seien $x, y \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$

Definition 1 (Einerkomplement:)

Sei $(x_{n-1} \dots x_0)_2$ die Binärdarstellung der Zahl x mit $x_i \in \{0,1\}$. Dann ist das Einerkomplement $K_1 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} K_1(x) = K_1((x_{n-1} \dots x_0)_2) &=_{df} ((x_{n-1} \oplus 1) \dots (x_0 \oplus 1))_2 \\ &= ((1 - x_{n-1}) \dots (1 - x_0))_2 \end{aligned}$$

Definition 2 (Zweierkomplement:)

Das Zweierkomplement $K_2 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ basiert auf dem oben definierten Einerkomplement:

$$K_2(x) \quad =_{df} \quad (K_1(x) + 1) \bmod 2^n$$

Das Zweierkomplement besitzt die wichtige Eigenschaft, daß sich die *Subtraktion* zweier natürlicher Zahlen in einfacher Weise auf die *Addition des Zweierkomplements* des Subtrahenden zurückführen läßt. Für die Konstruktion eines Rechners bedeutet dies, daß auf die Integration einer Subtraktions–Einheit verzichtet werden kann.

Der folgende Satz konkretisiert die genannte Eigenschaft und unterscheidet dabei zwischen einem positiven Ergebnis der Subtraktion (a) und einem negativen Ergebnis der Subtraktion (b).

Satz 1 (Subtraktionseigenschaften)

$$\begin{array}{lll} (a) & x \geq y & \Rightarrow x - y = (x + K_2(y)) \bmod 2^n \\ (b) & x < y & \Rightarrow x - y = -(K_2(x + K_2(y)) \bmod 2^n) \end{array}$$

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einigen Lemmata, die aus Gründen der Übersichtlichkeit dem eigentlichen Beweis des Satzes vorgezogen sind.

Lemmata

Lemma 1

$$x + K_1(x) = 2^n - 1 = (\underbrace{1 \dots 1}_{n})_2$$

Dies ist gleichbedeutend mit:

$$K_1(x) = (2^n - 1) - x$$

Beweis

$$x = (x_{n-1} \dots x_0)_2 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i$$

$$K_1(x) = ((1 - x_{n-1}) \dots (1 - x_0))_2 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i (1 - x_i)$$

$$\begin{aligned} x + K_1(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i x_i + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i (1 - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (2^i x_i + 2^i (1 - x_i)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \underbrace{(x_i + (1 - x_i))}_{=1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\
&= 2^n - 1
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemma 2

$$K_2(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Beweis

$\Leftarrow$:

$$
\begin{array}{llll}
y = 0 & \Rightarrow & K_1(y) = 2^n - 1 & [\,\text{Def. } K_1\,] \\
 & \Rightarrow & K_1(y) + 1 = 2^n & [\,\text{Arithm.}\,] \\
 & \Rightarrow & (K_1(y) + 1) \bmod 2^n = 0 & [\,\text{Arithm.}\,] \\
 & \Rightarrow & K_2(y) = 0 & [\,\text{Def. } K_2\,]
\end{array}
$$

$\Rightarrow$:

$$
\begin{array}{llll}
K_2(y) = 0 & \Rightarrow & (K_1(y) + 1) \bmod 2^n = 0 & [\,\text{Def. } K_2\,] \\
 & \Rightarrow & K_1(y) + 1 = 2^n & [\,0 < (K_1(y) + 1) \leq 2^n \text{ da } 0 \leq K_1(y) < 2^n\,] \\
 & \Rightarrow & K_1(y) = 2^n - 1 & [\,\text{Arithm.}\,] \\
 & \Rightarrow & y = 0 & [\,\text{Lemma (1)}\,]
\end{array}
$$

$\square$

Lemma 3

$$y > 0 \Rightarrow K_2(y) = 2^n - y$$

Beweis

$$
\begin{array}{llll}
K_2(y) & = & (K_1(y) + 1) \bmod 2^n & [\,\text{Def. } K_2\,] \\
 & = & K_1(y) + 1 & [\,y > 0 \Rightarrow K_1(y) < 2^n - 1\,] \\
 & = & 2^n - y & [\,\text{Lemma (1)}\,]
\end{array}
$$

$\square$

Lemma 4

$$(x + K_2(x)) \bmod 2^n = 0$$

Beweis

Fall $x = 0$:

$$
\begin{array}{llll}
(0 + K_2(0)) \bmod 2^n & = & (0 + 0) \bmod 2^n & [\,\text{Lemma (2)}\,] \\
 & = & 0 &
\end{array}
$$

Fall $x > 0$:

$$\begin{array}{rcll} (x + K_2(x)) \bmod 2^n & = & (x + (K_1(x) + 1) \bmod 2^n) \bmod 2^n & [\,\text{Def. } K_2\,] \\ & = & (x + (K_1(x) + 1)) \bmod 2^n & [\,x > 0\,] \\ & = & (x + (2^n - 1 - x + 1)) \bmod 2^n & [\,\text{Lemma (1)}\,] \\ & = & 2^n \bmod 2^n & \\ & = & 0 & \end{array}$$

□

Lemma 5

$$x > 0 \Rightarrow x - y = x + K_2(y) - 2^n$$

Beweis

$$\begin{array}{rcll} x - y & = & x + (2^n - y) - 2^n & [\,\text{Arithm.}\,] \\ & = & x + K_2(y) - 2^n & [\,y > 0 \text{ und Lemma (3)}\,] \end{array}$$

□

Lemma 6

$$x \geq y \wedge y > 0 \Rightarrow 2^n \leq x + K_2(y) < 2^{n+1}$$

Beweis

Fall $x = y$: Vgl. Beweis Lemma (4): $x + K_2(x) = 2^n$

Fall $x > y$:

$$\begin{array}{rcll} x - y & = & x + \underbrace{K_2(y) - 2^n}_{=-y} & [\,(x-y) > 0,\ \text{Lemma (3)}\ ] \\ & \Rightarrow & 2^n < x + K_2(y) < 2^{n+1} & [\,0 < (x - y) < 2^n - 1\,] \end{array}$$

□

Beweis des Satzes

Beweis zu Satz 1(a)

Der Beweis des Satzes 1(a) gliedert sich in drei Teile. Zuerst wird gezeigt, daß der Satz allgemein für $y = 0$ korrekt ist, damit dieser Sonderfall in den weiteren Betrachtungen nicht mehr berücksichtigt werden muß. Anschließend wird die Vorbedingung $x \geq y$ von Satz 1(a) in einer weiteren Fallunterscheidung zerlegt in die Fälle $x = y$ (Ergebnis ist 0) und $x > y$ (Ergebnis ist positiv). Kommentare zu den jeweiligen Umformungen sind in eckigen Klammern angegeben.

Fall $y = 0$:

$$\begin{array}{rcll} x - y & = & x - 0 & \\ & = & (x + 0) \bmod 2^n & [\,\text{da } x \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}\,] \\ & = & (x + K_2(0)) \bmod 2^n & [\,\text{Lemma (2)}\ ] \\ & = & (x + K_2(y)) \bmod 2^n & [\,y = 0\,] \end{array}$$

Fall $x = y, y > 0$:

$$\begin{array}{rcll} x - y & = & 0 & \\ & = & (x + K_2(x)) \bmod 2^n & [\,\text{Lemma (4)}\ ] \\ & = & (x + K_2(y)) \bmod 2^n & [\,x = y\,] \end{array}$$

Fall $x > y, y > 0$:

$$\begin{aligned} x - y &= x + \underbrace{K_2(y) - 2^n}_{=-y} && [\,(x-y) > 0,\ \text{Lemma (3)}\ ] \\ &= (x + K_2(y)) \bmod 2^n && [\,\text{Lemma (6)}\,] \end{aligned}$$

$\square$

Beweis zu Satz 1(b)

Der Teil (b) des Satzes 1 trifft genau dann zu, wenn das Ergebnis der Subtraktion (x-y) negativ ist. Dabei ist zu beachten, daß das Ergebnis der Funktion K_2, so wie sie hier eingeführt wurde, noch nicht als *negative Zahl* zu deuten ist. Lediglich die hier bewiesenen Eigenschaften des Zweierkomplements legen es nahe, negative Zahlen im Rechner als das Zweierkomplement des Betrages zu speichern, da die Addition mit dem Zweierkomplement ähnliche Eigenschaften wie die Subtraktion besitzt. Erst bei der rechnerinternen Repräsentation negativer Zahlen im Zweierkomplement ist es notwendig, das höchstwertigste Bit dafür zu verwenden, zweierkomplement–dargestellte Zahlen als solche eindeutig zu kennzeichnen. Hierduch ergibt sich dann der bekannte darstellbare Bereich für vorzeichenbehaftete Zahlen als $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$.

$$\begin{aligned} x - y &= x + K_2(y) - 2^n && [\,\text{Lemma (5) und } 0 < y \text{ wg. Vorbed. } x < y\,] \\ &= -(2^n - \underbrace{(x + K_2(y))}_{>0,\text{da } x \neq y}) \\ &= -K_2(x + K_2(y)) && [\,\text{Lemma (3)}\,] \\ &= -(K_2(x + K_2(y)) \bmod 2^n) && [\,\text{Lemma (4)}\,] \end{aligned}$$

$\square$